

異種接合界面に平行なき裂の $\sqrt{\text{area}}$ パラメータによる評価[†]野田尚昭* 山下務**
永石雅大** 小野勝也***Stress Intensity Evaluation Formula for a Crack Parallel to an Interface
by $\sqrt{\text{area}}$ Parameter

by

Nao-Aki NODA*, Tsutomu YAMASHITA**,
Masa-hiro NAGAISHI** and Katsuya ONO***

To evaluate arbitrary shaped defects or cracks parallel to an interface, a formula is proposed in terms of $\sqrt{\text{area}}$ parameter for the maximum stress intensity factors. Here "area" is the projected area of the defect or crack. First, the results for an elliptical crack parallel to a bimaterial interface are considered with varying the distance, aspect ratio of the crack, and combinations of material's constants systematically. Second, the stress intensity factors of an interface crack and a crack in a functionally graded material are also investigated. It is found that the maximum stress intensity factors normalized by $\sqrt{\text{area}}$ are almost independent of the crack aspect ratio. They are given in a form of formula useful for engineering applications.

Key words : Fracture mechanics, Stress intensity factor, Bimaterial interface, Cracks, $\sqrt{\text{area}}$ parameter

1 緒 言

3次元き裂の解析は構造物に存在する多くの欠陥の評価に有効である。村上ら^{1), 2)}は、実際問題でたびたび遭遇するような欠陥について、実用的に十分な精度で予測する方法を確立することを目標として、Fig. 1 に示すような座標系で任意形状内部き裂が σ_z^∞ を受ける場合に、以下のような最大応力拡大係数を求める評価式を提案した。

$$K_{I\max} = 0.50\sigma_z^\infty\sqrt{\pi\sqrt{\text{area}}} \quad (1)$$

また、著者らは任意形状内部き裂が遠方でせん断応力 τ_{yz}^∞ を受ける場合、モードⅡ、Ⅲの最大応力拡大係数が以下のように表わされることを示した^{3), 4)}

$$K_{II\max} = 0.55\tau_{yz}^\infty\sqrt{\pi\sqrt{\text{area}}} \quad (2)$$

(Fig. 1 で横長 $a/b \geq 1$ のとき)

$$K_{III\max} = 0.45\tau_{yz}^\infty\sqrt{\pi\sqrt{\text{area}}} \quad (3)$$

(Fig. 1 で縦長 $a/b \leq 1$ のとき)

ここで area はき裂の面積と見なす面積であり、例えば Fig. 1 (a) では、 $\text{area} = \pi ab$ 、Fig. 1 (b) では、 $\text{area} = 4ab$ 、である。(但し、 $a/b \geq 5$ では $\text{area} = 20b^2$ 、 $a/b \leq 0.2$ では $\text{area} = 20a^2$).

式 (1)～(3) の根拠として、だ円き裂^{3), 4)}と長方形き裂^{5), 6)}が遠方で σ_z^∞ または τ_{yz}^∞ を受ける場合の A, B に生じる最大応力拡大係数を Table I に示す。ここで F_I^* はポアソン比 ν に無関係であるが、 F_{II}^* , F_{III}^* はポアソン比に依存するので $\nu = 0 \sim 0.5$ のすべての範囲での最大値と最小値を Table I に示した。

Table I の例からも明らかなように式 (1)～(3) は均質材中の任意形状 3 次元き裂の $K_{I\max} \sim K_{III\max}$ の評価に有用である。

一方最近では、複合材料の使用が各分野に広がることに伴って、異種接合界面近傍に存在する欠陥の評価が重

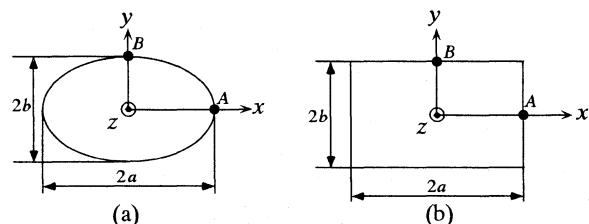


Fig. 1. An elliptical and rectangular crack.

Table I. Maximum stress intensity factors at A or B for an elliptical crack or rectangular crack in Fig. 1.

		Elliptical Crack	Rectangular Crack
F_I^* at A	$\cong 0.5$ $a/b \leq 1$	0.47～0.52 ⁽³⁾	0.47～0.52 ⁽⁵⁾
F_I^* at B	$\cong 0.5$ $a/b \geq 1$	0.47～0.52 ⁽³⁾	0.47～0.52 ⁽⁵⁾
F_{II}^* at B	$\cong 0.55$ $a/b \geq 1$	0.46～0.64 ⁽⁴⁾	0.47～0.64 ⁽⁶⁾
F_{III}^* at A	$\cong 0.45$ $a/b \leq 1$	0.32～0.52 ⁽⁴⁾	0.39～0.54 ⁽⁶⁾

$$F_I^* = \frac{K_{I\max}}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}}}$$

$$F_{II}^* = \frac{K_{II\max}}{\tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}}}$$

$$F_{III}^* = \frac{K_{III\max}}{\tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}}}$$

† 原稿受理 平成 14 年 12 月 16 日 Received Dec. 16, 2002

* 正会員 九州工業大学工学部機械知能工学科 〒804-8550 北九州市戸畠区仙水町, Dept. of Mech. Eng., Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804-8550

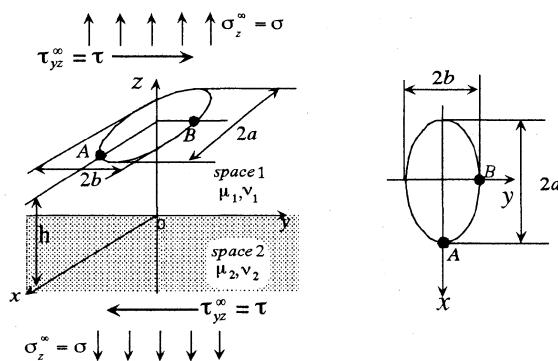
** 九州工業大学工学部機械知能工学科 〒804-8550 北九州市戸畠区仙水町, Dept. of Mech. Eng., Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804-8550

*** 九州工業大学大学院 〒804-8550 北九州市戸畠区仙水町, Graduate Student, Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804-8550

要となってきた。そこで著者らは前報で界面に垂直に接して存在する3次元き裂の最大応力拡大係数の評価に有用な $\sqrt{\text{area}}$ を用いる評価式を提案した。⁷⁾

本研究では、同様の観点から界面に平行に3次元き裂が存在し、そのき裂が遠方で σ_z^∞ または τ_{yz}^∞ を受ける場合 (Fig. 2 (a)) の $\sqrt{\text{area}}$ パラメータを用いる評価式を考察する。この場合、界面とき裂間の距離が十分大きい場合には、式(1)～(3)を用いて評価できるものと考えられるが、一般的には界面からの距離の関数として評価式を与える必要がある。本研究の考察には界面に平行なだ円形き裂の解析プログラム⁸⁾を使用するが、 $\sqrt{\text{area}}$ パラメータを用いることによって任意の3次元き裂の評価に利用できる。さらにFig. 2 (b)に示すような傾斜機能材料中のき裂についても合わせて考察を行う。このような傾斜機能材料では界面が存在しないので界面の存在に伴って生じる種々の問題が解決できることから注目されている。

以下では式(4), (5)の無次元化表示を用いる。



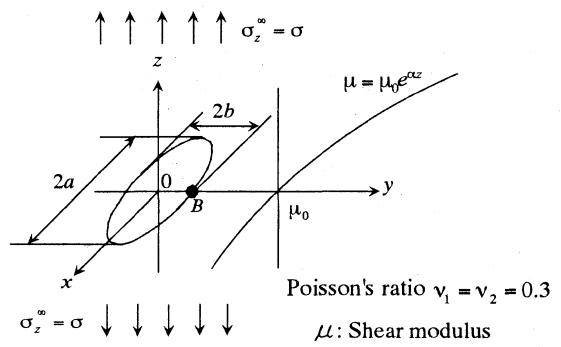
(a) An elliptical crack parallel to a bimaterial interface

$$\left. \begin{aligned} F_I &= K_{I \max} / (\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}), \quad F_I^* = K_{I \max} / \sigma_z^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}} \\ F_{II} &= K_{II \max} / (\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}), \quad F_{II}^* = K_{II \max} / \sigma_z^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}} \\ F_{III} &= K_{III \max} / (\sigma_z^\infty \sqrt{\pi a}), \quad F_{III}^* = K_{III \max} / \sigma_z^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} F_I &= K_{I \max} / (\tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi b}), \quad F_I^* = K_{I \max} / \tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}} \\ F_{II} &= K_{II \max} / (\tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi b}), \quad F_{II}^* = K_{II \max} / \tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}} \\ F_{III} &= K_{III \max} / (\tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi a}), \quad F_{III}^* = K_{III \max} / \tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

2 ポアソン比の影響について

Table IIでは、だ円き裂が界面に近い場合に、両材料のポアソン比を変化させた場合の影響を調べたものである。Table II (a)でモードIに注目すると、 $h/2b = 0.1$ で F_I に最大で約24%の違いが認められる。両材料のポアソン比を $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ とすれば、両材料のポアソン比を極端に0から0.5まで変化させてもそれらが $\pm 12\%$ 以下で求まることが分かる。また、界面からの距離がやや大となる $h/2b = 0.4$ では約7%で求めることができる。よって



(b) Crack in a nonhomogeneous material

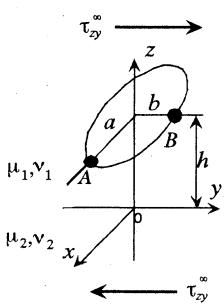
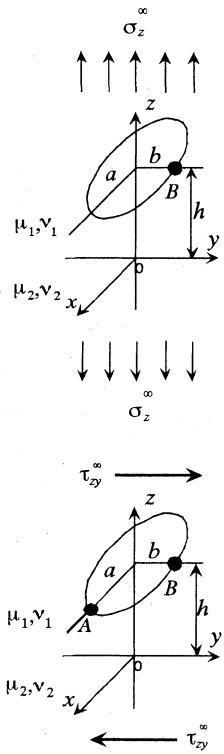
Fig. 2. Problems considered.

Table II (a). Effect of Poisson's ratio (a) when $\sigma_z^\infty = \sigma$, $\tau_{yz}^\infty = 0$ in Fig. 1 (a).

a/b	16						1	
	0.1			0.4			0.1	0.4
	μ_2/μ_1	0	0.5	∞	0	0.5	∞	0.5
$F_{I \text{ at } B}$	$\nu_1 = 0.0$ $\nu_2 = 0.0$	5.9439	1.1524	0.6678	1.7090	1.0857	0.798	0.7243
	$\nu_1 = 0.5$ $\nu_2 = 0.5$	5.9443	1.1971	0.7101	1.7092	1.1316	0.760	0.7563
	$\nu_1 = 0.0$ $\nu_2 = 0.5$	5.9439	1.0055	0.6678	1.7090	1.0352	0.798	0.6544
	$\nu_1 = 0.5$ $\nu_2 = 0.0$	5.9443	1.3145	0.7101	1.7092	1.1628	0.760	0.8093
	$\nu_1 = 0.3$ $\nu_2 = 0.3$	5.9434	1.1748	0.7122	1.7090	1.1073	0.800	0.7397
$F_{II \text{ at } B}$	$\nu_1 = 0.0$ $\nu_2 = 0.0$	3.0239	0.0917	-0.2210	0.288	0.0371	-0.084	0.0513
	$\nu_1 = 0.5$ $\nu_2 = 0.5$	3.0220	0.0800	-0.0866	0.287	0.0530	-0.082	0.0507
	$\nu_1 = 0.0$ $\nu_2 = 0.5$	3.0239	-0.0576	-0.2210	0.288	0.0119	-0.084	-0.0201
	$\nu_1 = 0.5$ $\nu_2 = 0.0$	3.0220	0.2142	-0.0866	0.287	0.0683	-0.082	0.1074
	$\nu_1 = 0.3$ $\nu_2 = 0.3$	3.0228	0.0921	-0.1519	0.287	0.0446	-0.075	0.0520

Table II (b). Effect of Poisson's ratio (a) when $\sigma_z^\infty = 0$, $\tau_{yz}^\infty = \tau$ in Fig. 1 (a).

a/b	16						1	
	0.1			0.4			0.1	0.4
	μ_2/μ_1	0	0.5	∞	0	0.5	∞	0.5
$F_{II \text{ at } B}$	$\nu_1 = 0.0$ $\nu_2 = 0.0$	1.2053	1.0817	0.6944	1.0950	1.0241	0.8540	0.6865
	$\nu_1 = 0.5$ $\nu_2 = 0.5$	1.2073	1.0789	0.8240	1.0984	1.0279	0.9277	0.9058
	$\nu_1 = 0.0$ $\nu_2 = 0.5$	1.2053	0.9625	0.6944	1.0950	0.9830	0.8540	0.6727
	$\nu_1 = 0.5$ $\nu_2 = 0.0$	1.2073	1.1557	0.8240	1.0984	1.0506	0.9277	0.9252
	$\nu_1 = 0.3$ $\nu_2 = 0.3$	1.2085	1.0855	0.7724	1.0994	1.0302	0.9025	0.8040
$F_{III \text{ at } A}$	$\nu_1 = 0.0$ $\nu_2 = 0.0$	-0.0634	-0.0616	0.0558	-0.0606	-0.0974	-0.0604	-0.6790
	$\nu_1 = 0.5$ $\nu_2 = 0.5$	0.0325	-0.0313	0.0289	-0.0306	-0.0306	0.0307	-0.4456
	$\nu_1 = 0.0$ $\nu_2 = 0.5$	-0.0634	-0.0597	-0.0558	-0.0606	-0.0604	-0.0604	-0.6299
	$\nu_1 = 0.5$ $\nu_2 = 0.0$	-0.0325	-0.0312	-0.0289	-0.0306	-0.0307	-0.0307	-0.4722
	$\nu_1 = 0.3$ $\nu_2 = 0.3$	-0.0448	-0.0435	-0.0403	-0.0427	-0.0428	-0.0427	-0.5557



以下では簡単のため Fig. 2 の材料 1, 2 をポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。

3 界面に平行なき裂が引張りを受ける場合の最大応力拡大係数

Fig. 2 (a) の問題で遠方で $\sigma_z^\infty = \sigma$, $\tau_{yz}^\infty = 0$ を受ける場合には、著者らは先に $\sqrt{\text{area}}$ パラメータが有効であることを明かにした。⁸⁾ そこで、使用の便利のため μ_2/μ_1 と $h/2b$ の関数として F_I^* (点 B に生じる最大値) の値を近似式で与える。この目的のため、 $\mu_2/\mu_1 = 0, 0.5, 2, \infty$ を対象とした前論文の解析結果は十分でないので、剛性比 $\mu_2/\mu_1 = 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 1.0$ 、形状比 $a/b = 1, a/b \rightarrow \infty$ の場合の F_I を $h/2b = 0.1 \sim \infty$ で追加計算によって求めた。その結果を $\sqrt{\text{area}}$ で整理した値 F_I^* を Table III に示す。Table III と先の論文の F_I^* の値⁸⁾を利用し、 $a/b = 1, a/b \rightarrow \infty$ の 2 つの F_I^* の平均値を用い最小自乗法により F_I^* を $\mu_2/\mu_1, h/2b$ の関数として近似式を求めた。その際、 $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0$ かつ $h/2b \rightarrow 0$ では F_I^* の値が a/b に依存する傾向が認められるため、その適用範囲を $\mu_2/\mu_1 \geq 0.3$ とした。それを以下に式 (6) として示す。Table IV に F_{II}^* も示すがき裂が界面に近い場合を除いてその値は小さく無視できる。

近似式 (6) は $\mu_2/\mu_1 \geq 0.3, h/2b \geq 0.1$ の範囲で誤差 10% 程度以内で任意形状の F_I を評価できると考えられる。式 (6) から得られる値を Fig. 3 に示す。Fig. 3 では $a/b = 1$ と $a/b \rightarrow \infty$ との結果を基にして近似式を作成し

たので、 $h/2b \rightarrow \infty$ で $F_I^* = 0.48$ (≈ 0.5 、式 (1) 参照) となっている。

(1) $0.1 \leq h/2b \leq 1.0$ のとき

$$\left. \begin{aligned} F_I^* = & (0.839 - 0.703G + 0.449G^2 - 0.113G^3) \\ & - (0.724 - 1.463G + 0.968G^2 - 0.237G^3)H \\ & + (0.504 - 1.048G + 0.709G^2 - 0.172G^3)H^2 \\ & - (0.117 - 0.246G + 0.169G^2 - 0.041G^3)H^3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで $H = h/2b$,

$$\left. \begin{aligned} 0.3 \leq \mu_2/\mu_1 \leq 1.0 \text{ のとき } G = \mu_2/\mu_1 \\ 1.0 \leq \mu_2/\mu_1 \leq \infty \text{ のとき } G = 2 - \mu_1/\mu_2 \end{aligned} \right\}$$

(2) $h/2b > 1.0$ のとき $F_I^* = 0.48$ (≈ 0.5)

4 界面に平行なき裂がせん断を受ける場合の最大応力拡大係数

Fig. 2 (a) で、 $\sigma_z^\infty = 0, \tau_{yz}^\infty = \tau$ についても前論文⁸⁾と同様な方法において解析できる。Fig. 4 は $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty$ のとき、 F_{II} (点 B に生じる最大値)、 F_{III} (点 A に生じる最大値) と $h/2b$ の関係を示す。一方 Fig. 5 は $\mu_2/\mu_1 = 0, \infty$ のとき、 $\sqrt{\text{area}}$ で整理した F_{II}^* , F_{III}^* の最大値と $h/2b$ の関係を示す。両者を比べると F_I , F_{II} , F_{III} は F_{II} , F_{III} に比べてき裂形状比に不敏感であり、狭い範囲に整理されることがわかる。例えば F_{II} と F_{II}^* で $a/b = 1$ と $a/b \rightarrow \infty$ の値の比に注目すると F_{II} の比 = $0.7140 \sim 0.7991$ に対して F_{II}^* の比 = $1.130 \sim 1.269 \approx 1$ である (Table V 参照)。一方、

Table III. Dimensionless stress intensity factor F_I^* at B under tension $\sigma_z^\infty = \sigma$ in Fig. 1 (a).

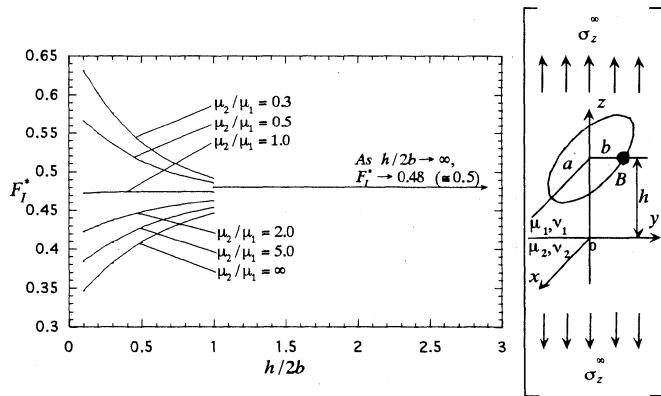
[The results of $\mu_2/\mu_1 = 0, 0.5, 2, \infty$ are shown in Ref⁸⁾.]

$h/2b$	μ_2/μ_1	0.01	0.05	0.1	0.3	1.0
0.1	$a/b=1$	1.5526	1.0869	0.8826	0.6352	0.47818
	$\rightarrow \infty$	2.0283	1.2166	0.9444	0.6494	0.47287
	[1]/[∞]	0.7655	0.8934	0.9346	0.9781	1.01123
0.2	$a/b=1$	0.9372	0.8263	0.7417	0.5953	0.47818
	$\rightarrow \infty$	1.2656	1.0075	0.8492	0.6249	0.47287
	[1]/[∞]	0.7405	0.8201	0.8734	0.9526	1.01123
0.3	$a/b=1$	0.7282	0.6854	0.6463	0.5621	0.47818
	$\rightarrow \infty$	0.9479	0.8401	0.7542	0.5995	0.47287
	[1]/[∞]	0.7682	0.8159	0.8569	0.9376	1.01123
0.4	$a/b=1$	0.6327	0.6110	0.5895	0.5377	0.47818
	$\rightarrow \infty$	0.7927	0.7352	0.6836	0.5760	0.47287
	[1]/[∞]	0.7982	0.8311	0.8623	0.9335	1.01123
0.5	$a/b=1$	0.5808	0.5679	0.5547	0.5209	0.47818
	$\rightarrow \infty$	0.7040	0.6683	0.6342	0.5564	0.47287
	[1]/[∞]	0.8250	0.8498	0.8746	0.9362	1.01123
1.0	$a/b=1$	0.50058	0.49821	0.49567	0.48856	0.47818
	$\rightarrow \infty$	0.54771	0.53908	0.53006	0.50586	0.47287
	[1]/[∞]	0.91395	0.93512	0.93512	0.96574	1.01123
2.0	$a/b=1$	0.48170	0.48095	0.48095	0.47984	0.47818
	$\rightarrow \infty$	0.49360	0.48912	0.48912	0.47259	0.47287
	[1]/[∞]	0.97589	0.98330	0.98330	0.99426	1.01123
∞	$a/b=1$	0.47818	0.47818	0.47818	0.47818	0.47818
	$\rightarrow \infty$	0.47287	0.47287	0.47287	0.47287	0.47287
	[1]/[∞]	1.01123	1.01123	1.01123	1.01123	1.01123

Table IV. Dimensionless stress intensity factor F_{II}^* at B under tension $\sigma_z^\infty = \sigma$ in Fig. 1 (a).

[The results of $\mu_2/\mu_1 = 0, 0.5, 2, \infty$ are shown in Ref⁸⁾.]

$h/2b$	μ_2/μ_1	0.01	0.05	0.1	0.3	1.0
0.1	$a/b=1$	0.6357	0.3380	0.2141	0.0796	0.0000
	$\rightarrow \infty$	0.9174	0.4067	0.2459	0.0894	
	[1]/[∞]	0.6929	0.8312	0.8406	0.8909	
0.2	$a/b=1$	0.2382	0.1774	0.1321	0.0566	0.00000
	$\rightarrow \infty$	0.4100	0.2690	0.1848	0.0713	0.00000
	[1]/[∞]	0.5809	0.6595	0.7146	0.7934	
0.3	$a/b=1$	0.1150	0.0947	0.0763	0.0375	0.00000
	$\rightarrow \infty$	0.2162	0.1653	0.1252	0.0549	0.00000
	[1]/[∞]	0.5319	0.5731	0.6095	0.6821	
0.4	$a/b=1$	0.0634	0.0543	0.0462	0.0242	0.00000
	$\rightarrow \infty$	0.1293	0.1055	0.0843	0.0407	0.00000
	[1]/[∞]	0.4902	0.5148	0.5479	0.5938	
0.5	$a/b=1$	0.0977	0.0329	0.0280	0.0156	0.00000
	$\rightarrow \infty$	0.0836	0.0705	0.0579	0.0299	0.00000
	[1]/[∞]	0.4512	0.4669	0.4837	0.5231	
1.0	$a/b=1$	0.00509	0.00454	0.00397	0.00236	0.00000
	$\rightarrow \infty$	0.01684	0.01490	0.01287	0.00742	0.00000
	[1]/[∞]	0.30199	0.30498	0.30881	0.37469	
2.0	$a/b=1$	0.00043	0.00038	0.00034	0.00020	0.00000
	$\rightarrow \infty$	0.00252	0.00226	0.00198	0.00118	0.00000
	[1]/[∞]	0.17003	0.16983	0.17100	0.17155	
∞	$a/b=1$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	$\rightarrow \infty$	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	[1]/[∞]					

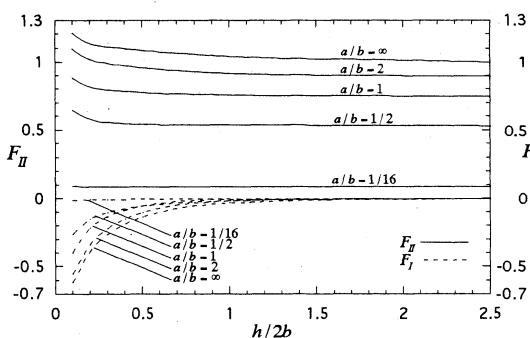
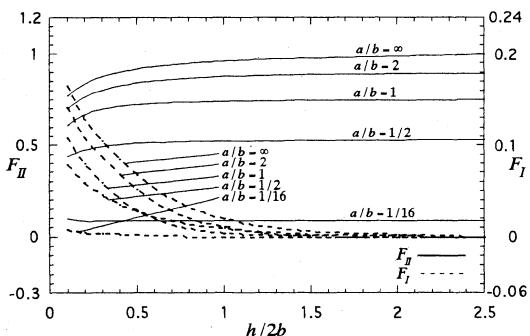
Fig. 3. Values of equation (5) useful for $a/b \geq 1$. ($\nu = 0.3$)

F_{III} と F_{III}^* で $a/b = 1$ と $a/b = 1/16$ の値の比に注目すると F_{III} の比 = $0.4133 \sim 0.5709$ に対して F_{III}^* の比 = $0.6565 \sim 0.9069 \cong 1$ となり (Table VII 参照), F_{III}^* は $\mu_2/\mu_1 \rightarrow 0, h/2b \rightarrow 0$ で形状比 a/b に依存する傾向がやや大きいことが分かる。次に F_{II}^* は $a/b = 1, a/b \rightarrow \infty$ についての平均値を用い, F_{II}^* は $a/b = 1, a/b = 1/16$ についての平均値を用いて最小自乗法により F_{II}^*, F_{III}^* を $\mu_2/\mu_1, h/2b$ の関数として近似式を求めた。それを以下に式 (7), (8) として示す。

(1) $0.1 \leq h/2b \leq 1.0$ のとき

$a/b \geq 1$ のとき

$$F_{II}^* = 0.628 - 0.267H + 0.216H^2 - 0.055H^3 - (0.113 - 0.274H + 0.222H^2 - 0.057H^3)G \quad (7)$$

Fig. 4 (a). Variation of F_I, F_{II} at B when $\mu_2/\mu_1 = 0$, $\nu_1, \nu_2 = 0.3$ under shear $\tau_{yz}^\infty = \tau$ in Fig. 2 (a).Fig. 4 (b). Variation of F_I, F_{II} at B when $\mu_2/\mu_1 = \infty$, $\nu_1, \nu_2 = 0.3$ under shear $\tau_{yz}^\infty = \tau$ in Fig. 2 (a).

$$\begin{aligned} a/b \leq 1 \text{ のとき} \\ F_{III}^* = & -(0.697 - 0.607G + 0.438G^2 - 0.114G^3) \\ & +(1.016 - 2.465G + 1.829G^2 - 0.462G^3)H \\ & -(1.437 - 3.635G + 2.751G^2 - 0.689G^3)H^2 \\ & +(0.848 - 2.203G + 1.691G^2 - 0.424G^3)H^3 \\ & -(0.175 - 0.463G + 0.359G^2 - 0.903G^3)H^4 \quad (8) \end{aligned}$$

ここで $H = h/2b$,

$$\begin{cases} 0.0 \leq \mu_2/\mu_1 \leq 1.0 \text{ のとき } G = \mu_2/\mu_1 \\ 1.0 \leq \mu_2/\mu_1 \leq \infty \text{ のとき } G = 2 - \mu_1/\mu_2 \end{cases}$$

(2) $h/2b \geq 1.0$ のとき

$$a/b \geq 1 \text{ のとき } F_{II}^* = 0.52 (\cong 0.55)$$

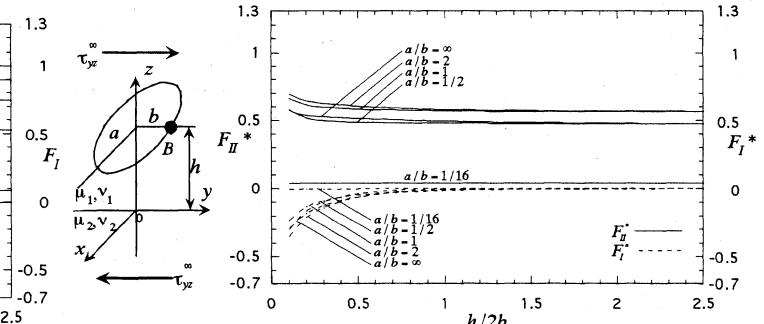
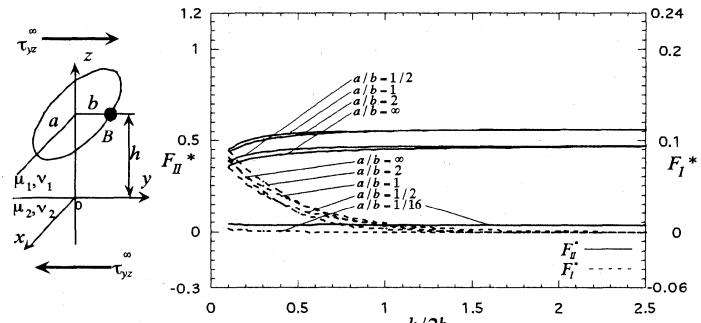
$$a/b \leq 1 \text{ のとき } F_{III}^* = 0.43 (\cong 0.45)$$

式 (7) は適用範囲で誤差 13% 程度以内で、式 (8) は適用範囲で誤差 17% 程度以内で、任意形状き裂の F_{II}^*, F_{III}^* が評価できると考えられる。式 (7), (8) から得られる値を Fig. 6 と Fig. 7 にそれぞれ示す。なお $h/2b \rightarrow \infty$ で、 $F_{II}^* = 0.52$ ($\cong 0.55$, 式 (2) 参照), $F_{III}^* = 0.43$ ($\cong 0.45$, 式 (3) 参照) となるのはボアソン比 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ として解析しているためである。なお、せん断応力 τ_{yz}^∞ によって生じる F_I^* の値は Fig. 4, 5 に示すようにき裂が界面に近い場合を除いて比較的小さい。

5 界面き裂の最大応力拡大係数

Fig. 2 (a) で $h \rightarrow 0$ に相当する界面き裂の点 B における最大応力拡大係数は以下で定義される。

$$\sigma_z + i\tau_{rz} \rightarrow \frac{K_1 + iK_2}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{2a} \right)^{i\varepsilon}, \quad (r = y - b \rightarrow 0)$$

Fig. 5 (a). Variation of F_I^*, F_{II}^* at B when $\mu_2/\mu_1 = 0$, $\nu_1, \nu_2 = 0.3$ under shear $\tau_{yz}^\infty = \tau$ in Fig. 2 (a).Fig. 5 (b). Variation of F_I^*, F_{II}^* at B when $\mu_2/\mu_1 = \infty$, $\nu_1, \nu_2 = 0.3$ under shear $\tau_{yz}^\infty = \tau$ in Fig. 2 (a).

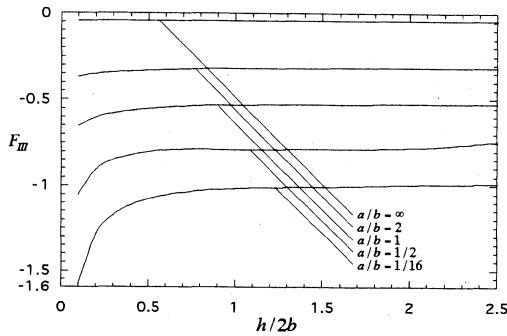


Fig. 4 (c). Variation of F_{III} at A when $\mu_2/\mu_1 = 0$, $\nu_1, \nu_2 = 0.3$ under shear $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$ in Fig. 2 (a).

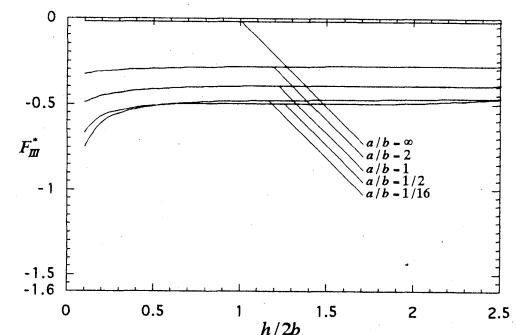
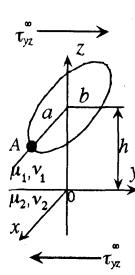


Fig. 5 (c). Variation of F_{III}^* at A when $\mu_2/\mu_1 = 0$, $\nu_1, \nu_2 = 0.3$ under shear $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$ in Fig. 2 (a).

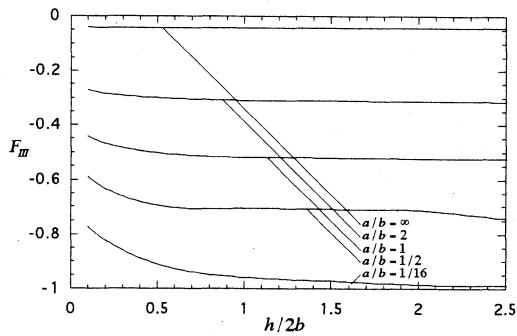


Fig. 4 (d). Variation of F_{III} at A when $\mu_2/\mu_1 = \infty$, $\nu_1, \nu_2 = 0.3$ under shear $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$ in Fig. 2 (a).

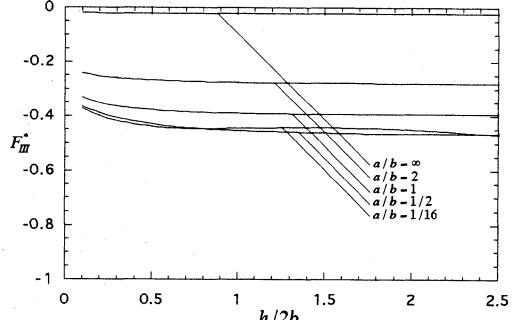
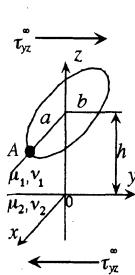


Fig. 5 (d). Variation of F_{III}^* at A when $\mu_2/\mu_1 = \infty$, $\nu_1, \nu_2 = 0.3$ under shear $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$ in Fig. 2 (a).

Table V. Dimensionless stress intensity factor F_{II} , F_{II}^* , at B under shear $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$ in Fig. 2 (a).

h/2b	a/b	F_{II}				F_{II}^*			
		$\mu_2/\mu_1 = 0$	$\mu_2/\mu_1 = 0.5$	$\mu_2/\mu_1 = 2.0$	$\mu_2/\mu_1 = \infty$	$\mu_2/\mu_1 = 0$	$\mu_2/\mu_1 = 0.5$	$\mu_2/\mu_1 = 2.0$	$\mu_2/\mu_1 = \infty$
0.1	1/16	0.091	0.089	0.085	0.098	0.0428	0.0471	0.0402	0.0463
	1/2	0.647	0.571	0.496	0.440	0.5779	0.5103	0.4428	0.3929
	1	0.8827	0.8040	0.6995	0.6131	0.6630	0.6036	0.5254	0.4605
	2	1.098	0.9745	0.8256	0.7026	0.6935	0.6155	0.5215	0.4438
	$\rightarrow\infty$	1.2085	1.0855	0.9210	0.7724	0.5715	0.5133	0.4355	0.3652
$(a/b = 1)/(a/b = \infty)$		0.7304	0.7407	0.7595	0.7938	1.1601	1.1765	1.2064	1.2610
0.2	1/16	0.0870	0.0870	0.0863	0.0858	0.0411	0.0411	0.0408	0.0405
	1/2	0.5777	0.5508	0.5108	0.4746	0.5160	0.4920	0.4560	0.4238
	1	0.8161	0.7750	0.7228	0.6700	0.6130	0.5821	0.5429	0.5033
	2	1.018	0.9402	0.8518	0.7649	0.6430	0.5938	0.5380	0.4831
	$\rightarrow\infty$	1.1330	1.0501	0.9484	0.8384	0.5358	0.4966	0.4485	0.3965
$(a/b = 1)/(a/b = \infty)$		0.7203	0.7380	0.7621	0.7991	1.1441	1.1722	1.2105	1.2694
0.5	1/16	0.0863	0.0865	0.0865	0.0868	0.0408	0.0409	0.0409	0.0410
	1/2	0.5430	0.5355	0.5249	0.5125	0.4851	0.4781	0.4687	0.4579
	1	0.75741	0.7573	0.7409	0.7243	0.5831	0.5688	0.5565	0.5440
	2	0.91748	0.9142	0.8780	0.8423	0.6054	0.5774	0.5546	0.5320
	$\rightarrow\infty$	1.04325	1.0259	0.9745	0.9188	0.5142	0.4851	0.4608	0.4345
$(a/b = 1)/(a/b = \infty)$		0.7140	0.7382	0.7603	0.7883	1.1340	1.1725	1.2077	1.2520
2.0	1/16	0.0865	0.0865	0.0865	0.0868	0.04090	0.04090	0.04090	0.04102
	1/2	0.5325	0.5310	0.5298	0.5287	0.47567	0.47435	0.47327	0.47226
	1	0.75046	0.74940	0.74857	0.74781	0.56369	0.56289	0.56084	0.56170
	2	0.89980	0.89658	0.89455	0.89247	0.56833	0.56647	0.56501	0.56370
	$\rightarrow\infty$	1.01410	1.01410	0.99603	0.98776	0.47354	0.47484	0.46711	0.46708
$(a/b = 1)/(a/b = \infty)$		0.74003	0.74630	0.75155	0.77140	1.17548	1.18543	1.19381	1.20258
∞	1/16	0.0865	0.0865	0.0865	0.0865	0.04090	0.04090	0.04090	0.04090
	1/2	0.5304	0.5304	0.5304	0.5304	0.47678	0.47678	0.47678	0.47678
	1	0.74907	0.74907	0.74907	0.74907	0.56265	0.56265	0.56265	0.56265
	2	0.89565	0.89565	0.89565	0.89565	0.56571	0.56571	0.56571	0.56571
	$\rightarrow\infty$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.47287	0.47287	0.47287	0.47287
$(a/b = 1)/(a/b = \infty)$		0.74907	0.74907	0.74907	0.74907	1.12986	1.12986	1.12986	1.12986

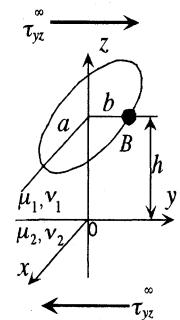
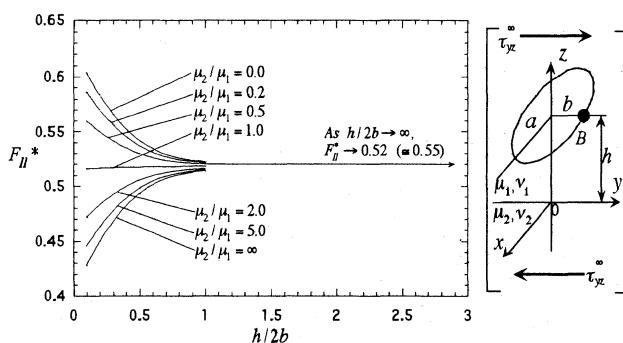
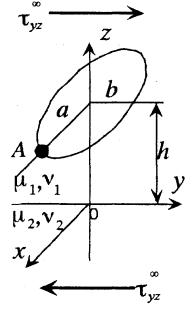
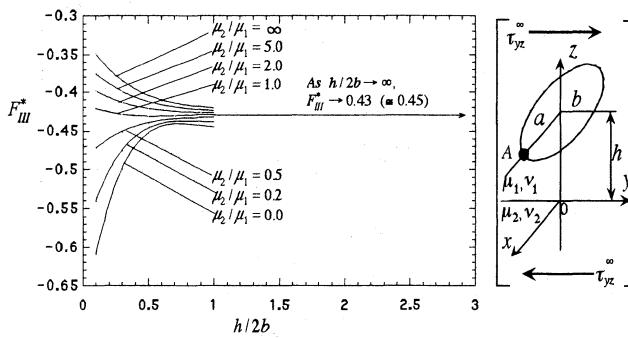


Table VI. Dimensionless stress intensity factor F_{III} , F_{III}^* , at A under shear $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$ in Fig. 1 (a).

$h/2b$	a/b	F_{III}				F_{III}^*			
		$\mu_2/\mu_1=0$	$\mu_2/\mu_1=0.5$	$\mu_2/\mu_1=2.0$	$\mu_2/\mu_1=\infty$	$\mu_2/\mu_1=0$	$\mu_2/\mu_1=0.5$	$\mu_2/\mu_1=2.0$	$\mu_2/\mu_1=\infty$
0.1	1/16	-1.579	-1.109	-0.8986	-0.7738	-0.7467	-0.5244	-0.4249	-0.3659
	1/2	-1.052	-0.8150	-0.6841	-0.5899	-0.6645	-0.5148	-0.4321	-0.3726
	1	-0.6526	-0.5557	-0.4955	-0.4413	-0.4902	-0.4174	-0.3722	-0.3315
	2	-0.3676	-0.3274	-0.2996	-0.2705	-0.3284	-0.2924	-0.2676	-0.2417
	$\rightarrow\infty$	-0.0448	-0.0435	-0.0420	-0.0403	-0.0212	-0.0206	-0.0199	-0.0190
	$(a/b-1)/(a/b-1/16)$	0.4133	0.5011	0.5514	0.5703	0.6565	0.7960	0.8760	0.9060
0.2	1/16	-1.287	-1.066	-0.9233	-0.8220	-0.6086	-0.5041	-0.4366	-0.3887
	1/2	-0.9048	-0.7856	-0.7042	-0.6332	-0.5715	-0.4962	-0.4448	-0.3999
	1	-0.6033	-0.5443	-0.5057	-0.4693	-0.4532	-0.4088	-0.3798	-0.3525
	2	-0.3509	-0.3232	-0.3041	-0.2842	-0.3134	-0.2886	-0.2716	-0.2538
	$\rightarrow\infty$	-0.0433	-0.0429	-0.0426	-0.0421	-0.0205	-0.0203	-0.0201	-0.0199
	$(a/b-1)/(a/b-1/16)$	0.4688	0.5106	0.5477	0.5709	0.7447	0.8110	0.8699	0.9069
0.5	1/16	-1.079	-1.016	-0.9607	-0.9103	-0.5102	-0.4804	-0.4543	-0.4305
	1/2	-0.8033	-0.7599	-0.7270	-0.6957	-0.5074	-0.4800	-0.4592	-0.4394
	1	-0.5523	-0.5321	-0.5169	-0.5028	-0.4148	-0.3997	-0.3883	-0.3777
	2	-0.3309	-0.3183	-0.3088	-0.2995	-0.2956	-0.2843	-0.2758	-0.2676
	$\rightarrow\infty$	-0.0428	-0.0428	-0.0426	-0.0421	-0.0202	-0.0202	-0.0202	-0.0202
	$(a/b-1)/(a/b-1/16)$	0.5119	0.5237	0.5380	0.5523	0.8130	0.8320	0.8547	0.8774
2.0	1/16	-0.9955	-0.9904	-0.9851	-0.9851	-0.47074	-0.46833	-0.46583	-0.46583
	1/2	-0.78045	-0.75365	-0.73285	-0.71312	-0.49294	-0.47602	-0.46288	-0.45042
	1	-0.52529	-0.52451	-0.52391	-0.52336	-0.39456	-0.39397	-0.39352	-0.39311
	2	-0.31468	-0.31374	-0.31301	-0.31234	-0.28109	-0.28025	-0.27959	-0.27899
	$\rightarrow\infty$	-0.04287	-0.04281	-0.04276	-0.04270	-0.02027	-0.02024	-0.02022	-0.02019
	$(a/b-1)/(a/b-1/16)$	0.52766	0.52959	0.53183	0.53128	0.83817	0.84122	0.84477	0.84389
∞	1/16	-0.98780	-0.98780	-0.98780	-0.98780	-0.46710	-0.46710	-0.46710	-0.46710
	1/2	-0.74290	-0.74290	-0.74290	-0.74290	-0.46923	-0.46923	-0.46923	-0.46923
	1	-0.52427	-0.52427	-0.52427	-0.52427	-0.39379	-0.39379	-0.39379	-0.39379
	2	-0.31335	-0.31335	-0.31335	-0.31335	-0.27990	-0.27990	-0.27990	-0.27990
	$\rightarrow\infty$	-0.04279	-0.04279	-0.04279	-0.04279	-0.02023	-0.02023	-0.02023	-0.02023
	$(a/b-1)/(a/b-1/16)$	0.53075	0.53075	0.53075	0.53075	0.84305	0.84305	0.84305	0.84305

Fig. 6. Values of equation (8) useful for $a/b \geq 1$. ($\nu = 0.3$)Fig. 7. Values of equation (9) useful for $a/b \leq 1$. ($\nu = 0.3$)

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{K_1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right] / \left[\frac{K_2}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right], \quad K_j = 3 - 4\nu_j, \quad (j = 1, 2)$$

Table VIIに示すように $a/b = 1^{(9)}$ と $a/b \rightarrow \infty^{(10)}$ との結果は $\sqrt{\text{area}}$ で整理するとよく一致しておりこの整理が有用であることがわかる。則ち、3節で述べたように界面に

平行なき裂で $\mu_2/\mu_1 < 0.3$, $h/2b \rightarrow 0$ では F_I^* の値がき裂の形状に依存する傾向が認められる。しかし、界面き裂 (Fig. 2 で $h/2b = 0$) では $a/b = 1$ と $a/b = \infty$ の比 = 0.996 ~ 1.011 ≈ 1.0 となり、むしろパラメータで良く整理されることがわかる。

6 傾斜機能材料中のき裂の最大応力拡大係数

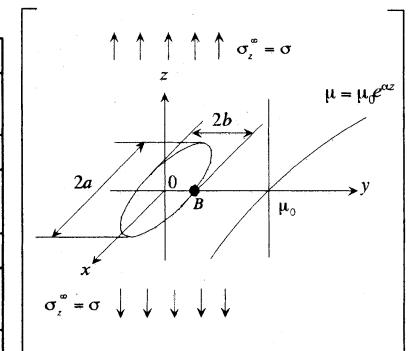
傾斜機能材料中のき裂について Erdogan らは多くの解析を行っている。^{11)~13)}しかし、それは2次元問題と軸対称問題に限定されている。実際の欠陥は3次元的であるためその場合の評価が必要となる。そこで本研究では Fig. 2 (b) で $a/b = 1^{(11)}$ と $a/b \rightarrow \infty^{(12)}$ の値が示されていることに注目して $\sqrt{\text{area}}$ パラメータの有効性を考察する。Table VIIにはだ円き裂の形状比 $a/b = 1, \infty$ の結果と $a/b = 1$ と $a/b = \infty$ の比も示す。この比 $(a/b = 1)/(a/b = \infty)$ を F_I と F_I^* で比較すると F_I ではその比が 1.57 ~ 2.16 の

Table VII. Interface cracks under tension when $h/2b \rightarrow 0$ in Fig. 2 (a).

ε	0.00	0.07	0.15	
$\frac{K_1}{\sigma \sqrt{\pi b}} \text{ at } B$	$a/b=1$	0.637	0.634	0.627
	$\rightarrow\infty$	1.000	1.000	1.000
$(a/b=1)/(a/b=\infty)$	0.637	0.634	0.627	
$\frac{K_2}{\sigma \sqrt{\pi b}} \text{ at } B$	$a/b=1$	0.000	0.106	0.228
	$\rightarrow\infty$	0.000	0.140	0.300
$(a/b=1)/(a/b=\infty)$	0.757	0.760		
$\frac{K_1}{\sigma \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}} \text{ at } B}$	$a/b=1$	0.478	0.476	0.471
	$\rightarrow\infty$	0.473	0.473	0.473
$(a/b=1)/(a/b=\infty)$	1.011	1.006	0.996	
$\frac{K_2}{\sigma \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}} \text{ at } B}$	$a/b=1$	0.000	0.0796	0.1713
	$\rightarrow\infty$	0.000	0.0662	0.1419
$(a/b=1)/(a/b=\infty)$	1.202	1.207		

Table VII. Dimensionless stress intensity factor F_I , F_I^* , F_{II}^* , F_{III}^* at B in Fig. 2 (b).

αb	0.0	0.1	0.25	0.5	1.0	2.5	5.0	
F_I	$a/b=1$ $\rightarrow\infty$	1.000 0.637	1.008 0.638	1.036 0.644	1.101 0.661	1.258 0.712	1.808 0.918	2.869 1.326
	$((a/b=1)/(a/b=\infty))$	1.570	1.580	1.609	1.666	1.767	1.969	2.164
F_{II}	$a/b=1$ $\rightarrow\infty$	0.000 0.000	0.026 0.011	0.065 0.026	0.129 0.053	0.263 0.107	0.697 0.280	1.567 0.611
	$((a/b=1)/(a/b=\infty))$		2.364	2.500	2.434	2.458	2.489	2.565
F_I^*	$a/b=1$ $\rightarrow\infty$	0.473 0.479	0.477 0.479	0.490 0.484	0.521 0.497	0.595 0.535	0.855 0.690	1.357 0.996
	$((a/b=1)/(a/b=\infty))$	0.987	0.996	1.012	1.048	1.112	1.239	1.362
F_{II}^*	$a/b=1$ $\rightarrow\infty$	0.000 0.000	0.0123 0.0083	0.0307 0.0195	0.0610 0.0398	0.1244 0.0804	0.3296 0.2103	0.7410 0.4589
	$((a/b=1)/(a/b=\infty))$		1.482	1.574	1.533	1.547	1.567	1.615



$$F_I = K_{I,\max} / (\sigma_z^{\infty} \sqrt{\pi b}), \quad F_I^* = K_{I,\max} / (\sigma_z^{\infty} \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}})$$

$$F_{II} = K_{II,\max} / (\sigma_z^{\infty} \sqrt{\pi b}), \quad F_{II}^* = K_{II,\max} / (\sigma_z^{\infty} \sqrt{\pi \sqrt{\text{area}}})$$

範囲にあるのに対して, F_I^* ではその比がほとんどの場合に $0.99 \sim 1.36$ の範囲にあって形状比の影響が比較的小さいことが分かる。すなわち全体としては F_I^* の値が a/b の変化に対して狭い範囲に納まっており $\sqrt{\text{area}}$ による整理が有用であることがわかる。傾斜機能材料中の 2 次元き裂の多くの問題が Erdogan らによって解析されてる¹³⁾が、それらを $\sqrt{\text{area}}$ パラメータで評価することによって、3 次元き裂の評価が可能である。

7 結 言

異種接合界面に平行に存在する 3 次元き裂の問題を Fig. 2 (a) を材料の剛性比 μ_2/μ_1 , き裂と界面との距離 $h/2b$, き裂形状比 a/b を種々に変化させて、その応力拡大係数の最大値を考察した。その結果以下のことが明らかとなった。

(1) Fig. 2 (a) で $\sigma_z^{\infty} = \sigma$, $\tau_{yz}^{\infty} = 0$ のモード I 応力拡大係数の最大値を $\sqrt{\text{area}}$ を用いて整理した値 F_I^* は、き裂形状比に関わらず $h/2b$, μ_2/μ_1 でほぼ決定される。そこで任意形状のき裂の最大応力拡大係数を与える式 (6) を提案した。

(2) $\sigma_z^{\infty} = 0$, $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$ のときのモード II, III 応力拡大係数の最大値を $\sqrt{\text{area}}$ を用いて整理した値 F_{II}^* , F_{III}^* は、き裂形状比に関わらず, $h/2b$, μ_2/μ_1 でほぼ決定される。そこで任意形状のき裂の最大応力拡大係数を与える式 (7) と式 (8) を提案した。

(3) 本論文では使用の便利のため評価式 (6)～(8) を μ_2/μ_1 と $h/2b$ のみの関数として求めた。その誤差は $\mu_2/\mu_1 \geq 0.3$, $h/2b \geq 0.1$ の範囲でポアソン比に対して $\pm 12\%$, 形状・材料組み合わせに対して $10 \sim 17\%$ 程度である。もし近似式をポアソン比や形状比の関数として求めれば、精度の向上や適用範囲外の評価も可能である。また、本論文では外荷重に対して最大となるモードの評価式のみ提示したが、厳密には異材界面近傍では混合モード状態となるので、他のモードの近似式も提案可能である。

(4) 界面に平行なき裂で $\mu_2/\mu_1 < 0.3$, $h/2b \rightarrow 0$ では F_I がき裂の形状に依存する傾向が認められるのに対して、界面き裂の応力拡大係数を $\sqrt{\text{area}}$ で整理すると、 $a/b =$

1 と $a/b = \infty$ の比 = $0.996 \sim 1.011 \approx 1.0$ となり、 $h/2b = 0$ の界面き裂の結果はむしろ $\sqrt{\text{area}}$ パラメータで良く整理され、形状比の影響は小さい (Table VII)。

(5) 傾斜機能材料中のき裂についても考察し $\sqrt{\text{area}}$ パラメータの有効性について示した。傾斜機能材料中の 2 次元き裂の多くの問題が Erdogan らによって解析されている¹³⁾が、それらを $\sqrt{\text{area}}$ パラメータで評価することによって、3 次元き裂の評価が可能である。

本研究の解析は大園瑠里氏（現凸版印刷勤務）の助力を得た。深くお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 村上敬宜, 石田 誠, 日本機械学会論文集, A-51, 1050 (1985).
- 2) 村上敬宜, 児玉昭太郎, 小沼静代, 日本機械学会論文集, A-54, 688 (1988).
- 3) G. R. Irwin, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., **29**, 651 (1962).
- 4) M. K. Kassir and G. C. Sir, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., **33**, 601 (1966).
- 5) 王 清, 野田尚昭, 本田昌章, 陳 夢成, 日本機械学会論文集, A-66, 650 (2000).
- 6) 野田尚昭, 木原利彰, 日本機械学会論文集, A-68, 670 (2002).
- 7) 野田尚昭, 秦 太験, 永石雅大, 山下 務, 材料, **51**, 8 (2002).
- 8) 野田尚昭, 大園瑠里, 陳 夢成, 日本機械学会論文集, A-68, 674 (2002).
- 9) R. L. Salganik, Prikl. Mat. Mech., **27**, 957 (1963).
- 10) M. K. Kassir and A. M. Bregman, ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., **39**, 308 (1972).
- 11) M. Ozturk and F. Erdogan, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., **60**, 406 (1993).
- 12) N. Konda and F. Erdogan, Eng. Fract. Mech., **47**, 533 (1994).
- 13) Y. Murakami (Ed), "Stress Intensity Factors Handbook", Vol.5, p.1879 (2001) The Society of Materials Science, Japan.